



دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی

تاسیس ۱۳۰۷

# برنامه ریزی نیمه معین

*A Math.blogfa.com*

پاییز ۱۳۸۵

استاد راهنما:

محمد رضا پناغی

گرد آورندگان:

شهریار میرزاده    روزبه ابرازی    رضادل ریش

## به نام خدا

### چکیده:

نظر به آنکه در دهه اخیر بسیاری از مسائل بهینه سازی با استفاده از روش کارآمد برنامه ریزی نیمه معین (SDP) حل می شوند، بر آن دیدیم تا گزارشی از مفاهیم مقدماتی آن را ارائه کنیم. در این مجموعه سعی شده است تا عناوین اصلی مساله برنامه ریزی خطی نیمه معین به بحث گذاشته شود.

در آغاز ساختمان و مفاهیم کلیدی مساله برنامه ریزی خطی (LP) بازنگری شده و سپس مساله برنامه ریزی نیمه معین معرفی شده است. این عمل در ابتدای متن گزارش به دلیل وجوه اشتراک بسیار زیاد این دو مساله خواننده را برای مطالعه برنامه ریزی نیمه معین آماده می کند. همچنین در قسمت ابتدایی متن مروری اجمالی بر روابط موجود میان ماتریس ها، بردارها و فضاها اقلیدسی شده است. (به راستی از آن جایی که جبر خطی جز لاینفک مفاهیم موجود در علم تحقیق در عملیات است، تسلط بر آن رمز موفقیت در مطالعه این شاخه نوپای ریاضی می باشد).

پس از معرفی مساله برنامه ریزی نیمه معین با ارائه مثال هایی کاربرد این مساله را در حل مسائل بهینه سازی شرح داده ایم و نیز در قسمتی از آن با بیان مساله برنامه ریزی خطی به عنوان حالت خاصی از مساله برنامه ریزی نیمه معین، عمومیت و سیطره آن بر مساله برنامه ریزی خطی (LP) بیش از پیش برای خواننده مشخص و معین شده است.

در ادامه به معرفی مساله دوگان مساله برنامه ریزی خطی نیمه معین و روابط میان جواب های این دو مساله به تفصیل پرداخته ایم. نکته جالب در این بخش شباهت های بسیار زیاد این روابط با قضایای ضعیف و قوی دوگانی مطرح شده در مسئله برنامه ریزی خطی می باشد.

در پایان گزارش به بررسی مساله ای جالب و خواندنی در نظریه گراف اقدام شده است که شاید این مثال بار دیگر ارتباط تنگاتنگ شاخه های متفاوت ریاضی با یکدیگر را به اثبات برساند.

به دلیل آن که مساله برنامه ریزی برنامه ریزی نیمه معین را نمی توان به وسیله روش هایی مشابه روش سیمپلکس حل کرد و بیشتر از روش های نقطه درونی در حل آن استفاده می شود که همانا برای مطالعه آن ها نیاز به دانستن مطالبی فراتر از سرفصل های ارائه شده در دوره کارشناسی ریاضی است، از ذکر آن ها در این گزارش خودداری شده است. در قسمت پایانی متن منابع استفاده شده در این پروژه که عموماً مقالاتی مرتبط از سایت های دانشگاه های معتبر جهان می باشد، ذکر شده اند. امید است مطالب این گزارش بتواند تا حدی بازگویی کاربردهای بی شمار مساله برنامه ریزی نیمه معین باشند.

در پایان از زحمات بی دریغ دکتر محمدرضا پیغامی که نصایح و رهنمود های ایشان ما را به داشتن شهودی هر چه بهتر از دنیای ریاضیات کاربردی سوق می دهد، کمال تشکر را داریم.

رضا دل ریش

روزبه ابرازی

شهریار میرزاده

## فهرست مطالب

۵	۱ مقدمه
۵	۲ مروری کوتاه بر برنامه ریزی خطی
۷	۳ نکاتی پیرامون ماتریس ها و مخروط های نیمه معین
۸	۴ برنامه ریزی نیمه معین
	۵ دوگان مسئله SDP
۱۷	۶ خواص کلیدی مسائل برنامه ریزی خطی که به برنامه ریزی نیمه معین گسترش نمی یابند :
۱۷	۷ SDP در بهینه سازی ترکیبیاتی
۱۷	۷.۱ بیان SDP Relaxation از مسئله برش یالی ماکسیمم
۲۰	منابع و مراجع

## ۱- مقدمه:

برنامه ریزی نیمه معین (SDP) جذاب ترین تحول برنامه ریزی ریاضی در دهه ۹۰ میلادی محسوب می شود. SDP در موضوعات گوناگون از جمله بهینه سازی مقید محدب سنتی، نظریه کنترل و بهینه سازی ترکیبیاتی کاربرد دارد. به دلیل آنکه SDP قابل حل به وسیله روش نقطه درونی می باشد، بیشتر این موارد کاربرد، در عمل نیز همانند تئوری کارا هستند.

## ۲- مروری کوتاه بر برنامه ریزی خطی:

مسئله LP را در حالت استاندارد در نظر بگیرید:

$$\text{LP : minimize } c \cdot x$$

$$\text{s.t. } a_i \cdot x = b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$x \in \mathbb{R}_+^n.$$

که در اینجا  $x$  یک بردار  $n$  متغیره است و نماد « $C \cdot X$ » حاکی از ضرب داخلی  $\sum_{j=1}^n c_j x_j$  می باشد. همچنین  $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0\}$  و  $\mathbb{R}_+^n$  فضای اقلیدسی نا منفی نامیده می شود. در حقیقت  $\mathbb{R}_+^n$  یک مخروط بسته محدب است، زمانی به یک مجموعه مانند  $K$  یک مخروط بسته محدب می گوئیم که شرایط زیر را داشته باشد:

• اگر  $x$  و  $y$  به  $K$  تعلق داشته باشد آنگاه  $\alpha x + \beta y$  نیز به  $K$  تعلق داشته باشد که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  اسکالر های نا منفی هستند.

$$\forall x, y \in K \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ : \alpha x + \beta y \in K$$

•  $K$  یک مجموعه بسته باشد.

این تعریف را می توانیم اینگونه بیان کنیم :

" منیمم کردن تابع خطی «  $c \cdot X$  » بطوری که  $X$  در  $m$  معادله  $a_i \cdot X = b_i$  ( $i=1, \dots, m$ ) صدق کند و  $X$  متعلق به مخروط بسته محدب  $R_+^n$  باشد "

دوگان یک مسئله LP را به صورت زیر نشان می دهیم :

$$\text{LD : maximize } \sum_{i=1}^m y_i b_i$$

$$\text{s.t. } \sum_{i=1}^m y_i a_i + s = c$$

$$s \in R_+^n.$$

اگر  $X$  یک جواب شدنی برای مسئله LP و  $(y, s)$  یک جواب شدنی برای مسئله LD باشد آنگاه فاصله دوگانی به صورت زیر است:

$$c \cdot x - \sum_{i=1}^m y_i b_i = (c - \sum_{i=1}^m y_i b_i) \cdot x = s \cdot x \geq 0$$

و نا مساوی بالا به خاطر  $x \geq 0$  و  $s \geq 0$  حاصل می شود . از قضیه قوی دوآلیتی می دانیم که اگر مسئله اولیه LP دارای جواب شدنی متناهی باشد آنگاه مسئله LD نیز شدنی متناهی است و  $c \cdot x = y \cdot b$  و این نتیجه می دهد که فاصله دوگانی (دوآلیتی) وجود ندارد. (برابر صفر است) یعنی اگر  $X$  فضای شدنی مسئله LP و  $F$  فضای شدنی مسئله LD باشد آنگاه:

$$\exists x^* \in X \quad \exists (y^*, s^*) \in F : c \cdot x^* - \sum_{i=1}^m y_i^* b_i = s^* \cdot x^* = 0$$

### ۳- نکاتی پیرامون ماتریس ها و مخروط های نیمه معین:

اگر  $X$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد زمانی گوئیم  $X$  یک ماتریس مثبت نیمه معین (PSD) است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : v^T X v \geq 0.$$

اگر  $X$  یک ماتریس  $n \times n$  باشد گوئیم  $X$  یک ماتریس مثبت معین (PD) است هر گاه:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0 : v^T X v > 0.$$

فرض کنید  $S^n$  نشان دهنده مجموعه ماتریس های متقارن  $n \times n$  باشد و  $S_+^n$  نشان دهنده مجموعه ماتریس های متقارن نیمه معین  $n \times n$  و  $S_{++}^n$  مجموعه ماتریس های  $n \times n$  مثبت معین باشد.

فرض کنیم  $X$  و  $Y$  ماتریس های متقارن دلخواهی باشند. می نویسیم " $X \geq 0$ " به این منظور که نشان دهیم  $X$  یک ماتریس مثبت نیمه معین است و نماد " $X \geq Y$ " بیانگر آن است که " $X - Y \geq 0$ " یعنی ماتریس  $X - Y$  مثبت نیمه معین است. به طریق مشابه هر گاه  $X$  یک ماتریس متقارن و مثبت معین باشد آن را با " $X \geq 0$ " نشان می دهیم.

تذکر ۱:  $S_+^n = \{X \in S^n : X \geq 0\}$  یک مخروط بسته محدب در  $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  است که بعد آن برابر  $\frac{n(n+1)}{2}$  است.

برای اثبات تذکر ۱ فرض می کنیم  $X \in S_+^n$  و  $W$  و  $\alpha, \beta \geq 0$  ثابت دلخواه باشند در این صورت هر گاه  $v \in \mathbb{R}^n$  و دلخواه باشد داریم:

$$v^T (\alpha X + \beta W) v = \alpha v^T X v + \beta v^T W v \geq 0.$$

پس  $\alpha X + \beta W \in S_+^n$  و این نشان می دهد که  $S_+^n$  یک مخروط است. اثبات بسته بودن  $S_+^n$  نیز ساده و سراسر است.

خواص زیر را برای ماتریس های متقارن بیان می کنیم :

- اگر  $X \in S^n$  باشد  $X = QDQ^T$  که  $Q$  در آن ماتریس متعامد یکه  $(Q^{-1} = Q^T)$  و  $D$  ماتریس قطری است.
- اگر  $X = QDQ^T$  به شکل بیان شده در بالا باشد آنگاه ستون های  $Q$  تشکیل مجموعه ای از  $n$  بردار سرشیت نمای متعامد  $X$  می دهند، که مقادیر ویژه آنها درایه های متناظر روی ماتریس قطری  $D$  است.
- $X \geq 0$  اگر و فقط اگر  $X = QDQ^T$  به طوری که تمامی مقادیر سرشیت نمای ماتریس  $X$  که عناصر ماتریس قطری  $D$  می باشند نا منفی باشند.
- $X \geq 0$  اگر و فقط اگر  $X = QDQ^T$  به طوری که تمامی مقادیر سرشیت نمای ماتریس  $X$  که عناصر ماتریس قطری  $D$  می باشند مثبت باشند.
- اگر  $X \geq 0$  و  $X_{ii} = 0$  آنگاه  $X_{ij} = X_{ji} = 0$  برای تمامی  $j = 1, \dots, n$ .
- فرض کنیم ماتریس  $M$  بصورت زیر باشد :

$$M = \begin{pmatrix} P & v \\ v^T & d \end{pmatrix},$$

که  $P \geq 0$  ،  $v$  یک بردار و  $d$  یک بردار اسکالر است در این صورت  $M > 0$  اگر و فقط اگر  $d - v^T P^{-1} v > 0$ .

۴- برنامه ریزی نیمه معین :

فرض کنیم  $X \in S^n$  . می توانیم به  $X$  بصورت یک ماتریس نگاه کنیم و یا به طور معادل بصورت آرایه ای از  $n^2$  مؤلفه بصورت  $(x_{11}, \dots, x_{nn})$  . همچنین می توانیم آنرا بصورت یک شی (بردار) در فضای  $S^n$  تصور کنیم . تمامی این ۳ طریق متفاوت برای تصور  $X$  کارآمد خواهند بود.

سوال: یک تابع خطی از  $X$  به چه صورتی می تواند باشد؟ اگر  $C(X)$  یک تابع خطی از  $X$  باشد آنگاه  $C(X)$  را می توانیم بصورت  $C \bullet X$  نمایش می دهیم بطوری که :

$$C \bullet X := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

اگر  $X$  یک ماتریس متقارن باشد بدون از دست دادن کلیت می توانیم فرض کنیم  $C$  نیز یک ماتریس متقارن است . با این نماد گذاری اکنون آماده هستیم تا یک برنامه ریزی نیمه معین را تعریف کنیم . یک برنامه ریزی نیمه معین (SDP) یک مسئله بهینه سازی به فرم :

$$\text{SDP : minimize } C \bullet X$$

$$\text{s.t. } A_i \bullet X = b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$X \geq 0,$$

است. توجه کنید که در SDP ، متغیر ما ماتریس  $X$  می باشد ولی برای سهولت در تصور می توانیم  $X$  را به صورت آرایه ای از  $n^2$  عدد یا به طور برداری در  $S^n$  در نظر بگیریم.

تابع هدف ، تابع خطی  $C \bullet X$  می باشد و  $X$  می بایست در  $m$  معادله خطی صدق کند که این معادلات به صورت  $A_i \bullet X = b_i$  ،  $(i = 1, \dots, m)$  هستند.

متغیر  $X$  همچنین باید در مخروط (محدب بسته) ماتریس های متقارن نیمه معین مثبت یعنی  $S_+^n$  قرار داشته باشد . توجه شود که داده های معلوم در مسئله SDP از یک

ماتریس متقارن  $C$  ( که داده برای تابع هدف محسوب می شود ) و  $m$  عدد ماتریس متقارن  $A_1, \dots, A_m$  و  $-m$  بردار  $b$  ( برداری است در  $\mathbb{R}^m$  ) که معادلات مربوط به مؤلفه های آن تشکیل  $m$  معادله خطی را می دهند ، ساخته شده است.

اجازه دهید با مثالی از SDP برای  $n=3$  و  $m=2$  آشنا شویم . ماتریس های  $A_1$  و  $A_2$  را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{و} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

و  $b_1 = 11$ ،  $b_2 = 19$ . پس متغیر  $X$  یک ماتریس  $3 \times 3$  متقارن بصورت زیر خواهد بود :

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix},$$

و برای مثال بالا خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} C \bullet X &= x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 9x_{22} + 0x_{23} + 3x_{31} + 0x_{32} + 7x_{33} \\ &= x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{22} + 0x_{23} + 7x_{33} \end{aligned}$$

در بالا از رابطه  $x_{12} = x_{21}$  ،  $x_{13} = x_{31}$  ،  $x_{23} = x_{32}$  به دلیل متقارن بودن  $X$  استفاده کردیم . بنابراین مسئله SDP را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{SDP : minimize} \quad x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 9x_{22} + 0x_{23} + 7x_{33}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_{11} + 0x_{12} + 2x_{13} + 3x_{22} + 14x_{23} + 5x_{33} = 11 \\ & 0x_{11} + 4x_{12} + 16x_{13} + 6x_{22} + 0x_{23} + 4x_{33} = 19 \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \geq 0$$

توجه کنید که SDP شبیه یک مسئله برنامه ریزی خطی است. گرچه شرط بزرگتر یا مساوی صفر بودن بردار  $x$  در مسئله LP یا شرط قرار داشتن ماتریس در مخروط ماتریس های مثبت نیمه معین جایگزین شده است، اما می توانیم وجه تشابهی را نیز میان این دو مسئله به این صورت در نظر بگیریم:

همان طور که " $x \geq 0$ " در مسئله LP بیانگر این است که هر یک از  $n$  مؤلفه بردار  $x$  نا منفی اند، نماد " $x \geq 0$ " در مسئله SDP بیانگر این است که هر یک از مقادیر ویژه ماتریس  $X$  نا منفی هستند.

به سهولت می توانیم نشان دهیم که LP حالتی خاص از SDP است. برای دیدن یک نمونه از آن فرض کنیم  $(c, a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m)$  داده های مسئله LP را تشکیل می دهند. ماتریس های  $A$  و  $C$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{i2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{in} \end{pmatrix}, i = 1, \dots, m, C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

در این مسئله LP می تواند بصورت زیر نوشته شود.

$$\text{SDP : minimize } C \bullet X$$

$$\text{s.t. } A_i \bullet X = b_i, \quad i=1, \dots, m$$

$$X_{ij} = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad j=i+1, \dots, n,$$

$$X \geq 0,$$

به همراه فرض :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{pmatrix}.$$

البته در عمل هیچ گاه یک مسئله LP را در هنگام حل به SDP تبدیل نمی کنند . رابطه بالا به وضوح نشان می دهد که LP حالت خاصی از مسئله SDP می باشد.

### ۵- دوگان مسئله SDP :

مسئله دوگان SDP بصورت زیر تعریف می شود :

$$\begin{aligned} \text{SDD : maximize} \quad & \sum_{i=1}^m y_i b_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \end{aligned}$$

$$S \geq 0$$

یک طریق مناسب برای تصور مسئله دوگان برنامه ریزی نیمه معین به صورت زیر است

:

فرض کنید ضرایب  $y_1, \dots, y_m$ ، داده شده باشند در این صورت هدف ماکسیمم کردن

تابع خطی  $\sum_{i=1}^m y_i b_i$  است. قید های مسئله SDP بیان می کنند که ماتریس  $S$  که به صورت زیر تعریف شده است :

$$S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i$$

باید مثبت نیمه معین باشد و به طور معادل میتوان نوشت:

$$C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \geq 0$$

ما این طرز ساخت را با مثالی که قبلا ارائه کردیم ، نشان می دهیم .

از مثال قبلی داریم :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ و } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, b_1 = 11, b_2 = 19$$

مسئله دوگان آن بصورت زیر است:

$$\text{SDD : maximize } 11y_1 + 19y_2$$

$$\text{s.t. } y_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} + s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$S \geq 0$$

که آن را می توانیم در این فرم باز نویسی کنیم :

$$\text{SDD : maximize } 11y_1 + 19y_2$$

$$\text{s.t. } \begin{pmatrix} 1 - 1y_1 - 0y_2 & 2 - 0y_1 - 2y_2 & 3 - 1y_1 - 8y_2 \\ 2 - 0y_1 - 2y_2 & 9 - 3y_1 - 6y_2 & 0 - 7y_1 - 0y_2 \\ 3 - 1y_1 - 8y_2 & 0 - 7y_1 - 0y_2 & 7 - 5y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} \geq 0.$$

اغلب کار کردن با مسئله دوگان SDD راحت تر از مسئله SDP است زیرا در مسئله دوگان متغیرها تنها از  $m$  ضریب  $y_1, \dots, y_m$  تشکیل شده اند.

همانند مسئله برنامه ریزی خطی LP مختاریم تا به سهولت از یک صورت مسئله SDP (اولیه یا دوگان) به صورت دیگر برویم و بدون از دست دادن کلیت می توانیم هر یک از آنها را به عنوان مسئله اولیه در نظر بگیریم.

در زیر قضیه ضعیف دوآلیتی (دوگانی) را برای مسئله SDP را بیان می کنیم :

قضیه. ۱.۵ : فرض کنیم  $X$  جواب شدنی برای مسئله SDP و  $(y, s)$  یک جواب شدنی برای مسئله SDD باشد در این صورت فاصله دوگانی برابر است با :

$$C \bullet X - \sum_{i=1}^m y_i b_i = S \bullet X \geq 0$$

اگر

$$C \bullet X - \sum_{i=1}^m y_i b_i = S \bullet X = 0$$

آنگاه  $X$  و  $(y, s)$  به ترتیب جواب های بهینه برای مسائل SDP و SDD خواهند بود و نیز  $SX = 0$ .

برای اثبات قضیه بالا مناسب است تا با رد (trace) ماتریس ها کار کنیم که برای ماتریس دلخواه  $M$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$\text{trace}(M) = \sum_{j=1}^n M_{jj}$$

به آسانی می توان اتحاد های زیر را از فرمول بالا نتیجه گرفت:

- $\text{trace}(MN) = \text{trace}(NM)$
- $A \bullet B = \text{trace}(A^T B)$

اثبات قضیه. ۱. ۵: برای قسمت اول باید نشان دهیم اگر  $X$  و  $S$  ماتریس های مثبت نیمه معین باشند ( $X \geq 0$  و  $S \geq 0$ ) آنگاه  $S \bullet X \geq 0$  نیز چنین است. فرض کنیم  $S = PDP^T$  و  $X = QEQ^T$  به طوریکه  $P^T = P^{-1}$  و  $Q^T = Q^{-1}$  (ماتریس های متعامد یکه هستند) و  $D$  و  $E$  ماتریس های قطری با درایه های نا منفی باشند در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} S \bullet X &= \text{trace}(S^T X) = \text{trace}(SX) = \text{trace}(PDP^T QEQ^T) \\ &= \text{trace}(DP^T QEQ^T P) = \sum_{j=1}^n D_{jj} (P^T QEQ^T P)_{jj} \geq 0, \end{aligned}$$

در قسمت آخر از رابطه:

$$\forall j (0 \leq j \leq n \Rightarrow D_{jj} \geq 0)$$

و نیز دانستن این موضوع که درایه های روی قطر اصلی ماتریس  $P^T QEQ^T P$  باید نا منفی باشند، استفاده کردیم. (زیرا  $P^T QEQ^T P$  ماتریس مثبت نیمه معینی است)

برای اثبات قسمت دوم قضیه فرض کنیم  $\text{trace}(SX) = 0$  آنگاه از تساوی های بالا داریم:

$$\sum_{j=1}^n D_{jj} (P^T QEQ^T P)_{jj} = 0$$

رابطه بالا ایجاب می کند که برای هر  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ )،  $D_{jj} = 0$  یا  $(P^T QEQ^T P)_{jj} = 0$ .  
 بعلاوه از اینکه  $D$  ماتریس قطری با درایه های بزرگتر یا مساوی صفر است و نیز  $P^T QEQ^T P$  ماتریس مثبت نیمه معین است به همراه رابطه بالا نتیجه می گیریم  $DP^T QEQ^T P = 0$ . در واقع به ازای هر  $j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) یا  $D_{jj} = 0$  و یا سطر  $j$ ام ماتریس  $P^T QEQ^T P$  مساوی صفر است و از رابطه آخر ( $DP^T QEQ^T P = 0$ ) نتیجه می شود  $PDP^T QEQ^T = 0$  اما از قبل می دانیم  $SX = PDP^T QEQ^T$  پس  $SX = 0$  و اثبات تمام است.

بر خلاف برنامه ریزی خطی LP نمی توانیم با قاطعیت بیان کنیم که مسئله SDP یا SDD به جواب بهینه مربوطه خود می رسند و یا به طور معادل بگوییم فاصله دوگانی حتما برابر صفر خواهد بود. برای آنکه درباره مقادیر بهینه این دو مسئله صحبت کنیم و موارد ذکر شده در بالا بر آورده شوند باید شرایط معینی بوجود آید که ما یکی از مهم ترین آنها را به صورت قضیه ای که در آن ارتباط تنگاتنگ جواب های شدنی مسائل SDP و SDD ذکر شده است بیان :

قضیه ۱. ۵: فرض کنیم  $z_p^*$  و  $z_d^*$  به ترتیب نشان دهند مقادیر بهینه توابع هدف مسائل SDP و SDD باشند. فرض کنیم  $\hat{X}$  یک جواب شدنی از مسئله باشد بطوری که  $\hat{X} > 0$  و نیز  $(\hat{y}, \hat{s})$  یک جواب شدنی بری مسئله SDD باشد (منظور این است که فضای شدنی مسائل SDP و SDD ناتهی است)، در این صورت هر دوی مسائل SDP و SDD به مقدار بهینه متناهی خود دست خواهند یافت و این مقادیر با یکدیگر برابرند  
 یعنی:  $z_p^* = z_d^*$

در اینجا اثباتی از این قضیه نمی آوریم.

## ۶- خواص کلیدی مسائل برنامه ریزی خطی که به برنامه ریزی

### نیمه معین گسترش نمی یابند:

در زیر بعضی از ویژگی های مسئله برنامه ریزی خطی LP که به مسئله برنامه ریزی نیمه معین گسترش نمی یابند خلاصه شده است .

- برای حل مسئله SDD یک الگوریتم متناهی وجود ندارد. برای این منظور الگوریتم سیمپلکس وجود دارد اما یک الگوریتم متناهی نیست و نیز به طور مستقیم مفهومی مثل " جواب شدنی پایه " برای حل SDP وجود ندارد.
- در مسئله LP ممکن است فاصله دوگانی متناهی یا نا متناهی وجود داشته باشد و مسائل اولیه و دوگان به جواب بهینه خود نرسند اما طبق قضایایی که پیش از

### ۷- SDP در بهینه سازی ترکیبیاتی:

SDP کاربردهای بسیاری در بهینه سازی ترکیبیاتی دارد . تعداد زیادی از مسائل بهینه سازی ترکیبیاتی NP-هارد (NP-hard) دارای " Relaxation " (آزادسازی) محدب هستند که زیر مجموعه ای از مسائل برنامه ریزی نیمه معین محسوب می شوند. در بسیاری از مثال ها " SDP relaxation " بصورت کاربردی نقش خود را ایفا می کند و در مواردی بیشتر به طور اخص ، جواب بهینه مسئله " SDP relaxation " می تواند به جواب شدنی مسئله اصلی که هدفمندی و کار آمدی مقدار آن قابل اثبات است تبدیل شود.

### ۱. ۷- بیان SDP Relaxation از مسئله برش یالی ماکسیمم:

فرض کنید  $G$  یک گراف غیر جهت دار با مجموعه رئوس  $N = \{1, \dots, n\}$  باشد و مجموعه یال ها  $E$  باشد . فرض کنیم برای  $(i, j) \in E$  ،  $w_{ij} = w_{ji}$  وزن یال  $(i, j)$  باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض می کنیم تمامی این وزن ها بزرگتر یا مساوی صفر هستند یعنی :

$$\forall (i, j) \in E : w_{ij} \geq 0$$

در مسئله برش یال ماکسیم (Max Cut Problem) هدف پیدا کردن زیر مجموعه ای از  $S$  است که در آن مجموع وزن های یال هایی که از  $S$  به  $\bar{S}$  وصل هستند ماکسیم باشد. ( $\bar{S} = N \setminus S$ )

ما می توانیم مسئله ماکسیم برش را به صورت یک مسئله برنامه ریزی اعداد صحیح به صورت مقابل در آوریم. فرض کنیم  $x_j$  برای  $j \in \bar{S}$ ، در این صورت مسئله به فرم زیر در می آید:

$$\text{MAX CUT : maximize}_x \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (1 - x_i x_j)$$

$$\text{s.t. } x_j \in \{-1, 1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

اکنون فرض کنیم

$$Y = xx^T$$

که به موجب آن

$$Y_{ij} = x_i x_j \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n$$

همچنین فرض کنیم  $W$  ماتریسی باشد که درایه ی  $(i, j)$  امین آن  $w_{ij}$  برای  $i = 1, \dots, n$  و  $j = 1, \dots, n$ ، آنگاه مسئله برش یالی ماکسیم (ماکسیم برش) می تواند به طور معادل به صورت زیر نوشته شود:

$$\text{MAX CUT : maximize}_{Y,x} \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} - W \bullet Y$$

$$\text{s.t. } x_j \in \{-1, 1\}, \quad j = 1, \dots, n$$

$$Y = xx^T$$

در مسئله بالا توجه کنید که قسمت اول محدودیت ها معادل است با

$$Y_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

بنابراین بدست می آوریم :

$$\text{MAX CUT : maximize}_{Y,x} \quad \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} - W \bullet Y$$

$$\text{s.t.} \quad Y_{jj} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$Y = xx^T$$

در نهایت توجه کنید که ماتریس  $Y = xx^T$  یک ماتریس متقارن نیمه معین مثبت از رتبه ۱ است. اگر این وضعیت را با حذف محدودیت رتبه ۱ بودن "relax" کنیم به فرم "Relaxation" زیر از مسئله برش یالی ماکسیم می رسیم که مسئله ای از نوع برنامه ریزی نیمه معین میباشد:

$$\text{Relax : maximize}_Y \quad \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} - W \bullet Y$$

$$\text{s.t.} \quad Y_{jj} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$Y \geq 0$$

بنابراین براحتی مشاهده می شود که مسئله Relax شده یک کران بالا برای مسئله برش یالی ماکسیم ایجاد می کند یعنی :

$$\text{MAXCUT} \leq \text{RELAX}$$

همچنین به آسانی می توان رابطه مهم زیر را نتیجه گرفت :

$$0,87856 \text{ RELAX} \leq \text{MAXCUT} \leq \text{RELAX}$$

که بسیار مهم و موثر است زیرا در آن این نکته بیان می شود که فاصله مقدار "Relaxation" نیمه معین از مسئله NP-هارد برش یال ماکسیمم بیش از ۱۲ در صد نیست.

با وجود آنکه کاربردهای مسئله SDP بیش از آن است که در بالا بیان شد اما ما در اینجا به دلیل فراتر بودن سطح علمی این مطالب از دروس ارائه شده در دوره کارشناسی ریاضی، از ذکر آن ها خودداری کردیم. در پایان امید است این گزارش توانسته باشد کلیاتی از مسئله SDP را تجزیه و تحلیل کرده باشد.

## منابع و مراجع

۱-Robert M.Ferund : "*Introduction to Semidefinite Programming(SDP)*",Massachusetts Institute of Technology, March ۲۰۰۴

۲-L.Vadenberghe and S.Boyd: "*Semidefinite programming* ", AMS , March ۲۰۰۶

۳-Kenneth Hoffman and Ray Kunze : "*Linear algebra (second edition)*" ,Prentice-Hall, ۱۹۷۱